



Cursillo de Actualización Docente

Límites, Derivadas e Integrales en la Enseñanza Media

III Seminario Estudiantil de Ecuaciones Diferenciales

Vinculación con el Medio para el Fortalecimiento de la Enseñanza y las Matemáticas Aplicadas

Facultad de Ciencias – Facultad de Educación y Humanidades
Universidad del Bío-Bío – Año 2025

Contents

1	Límites	2
1.1	Motivación	2
1.2	Límites de funciones reales en un número	4
1.3	Límite infinito y asíntota vertical	7
1.4	Límite en el infinito y asíntota horizontal	8
1.5	Aplicaciones contextualizadas del concepto de límite	10
2	Derivadas y razones de cambio	12
2.1	Razón de cambio promedio	12
2.2	Razón de cambio instantánea: la derivada	12
2.3	Crecimiento y decrecimiento: interpretación del signo de la derivada	13
2.4	Puntos críticos y extremos locales	14
2.5	Concavidad y punto de inflexión	14
2.6	Actividades integradoras: optimización	15
3	Integrales: suma acumulativa y área bajo la curva	18
3.1	La integral como área bajo la curva	18
3.2	Aproximación de una integral definida usando rectángulos (Sumas de Riemann) . . .	19
3.3	La integral como suma acumulativa	22
3.4	Interpretación geométrica y aplicación en contextos reales	22
3.5	Actividades integradoras: cálculo de áreas y acumulación	23

Introducción

Esta guía presenta una secuencia progresiva de actividades orientadas al desarrollo del pensamiento funcional y a la comprensión de conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral, en concordancia con los nuevos estándares de calidad docente. Su propósito es favorecer una aproximación gradual, significativa y aplicada a los contenidos, considerando tanto la construcción conceptual como su uso en la resolución de situaciones problemáticas.

A lo largo de la guía se abordan los conceptos de límites, derivadas e integrales, enfatizando la relación entre sus distintas representaciones (gráfica, numérica, algebraica y verbal). Asimismo, se incorporan actividades de modelación y resolución de problemas contextualizados, que permiten vincular las herramientas del cálculo con fenómenos de variación, cambio y acumulación presentes en ámbitos científicos, cotidianos y tecnológicos.

De este modo, la propuesta busca fortalecer no solo el dominio procedimental de los contenidos, sino también la capacidad de interpretar, argumentar, comunicar y tomar decisiones matemáticas fundamentadas.

Una breve noción de funciones

Una función puede representarse de distintas maneras (ver Figura 1):

1. **Definición clásica:** una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento $f(x)$ de otro conjunto E .
2. **Máquina:** una función recibe un valor de entrada x , realiza una operación y entrega como salida el valor $f(x)$.
3. **Diagrama de flechas:** cada elemento del conjunto de partida se relaciona con un único elemento del conjunto de llegada.
4. **Gráfica:** una función puede visualizarse gráficamente en el plano cartesiano.
5. **Expresión algebraica:** una función también puede describirse mediante una fórmula.

1. Límites

1.1 Motivación

El concepto de límite es una de las ideas fundamentales del cálculo, pues permite describir el comportamiento de una magnitud cuando una variable se aproxima a un valor determinado. Su estudio resulta especialmente relevante porque aparece en diversos contextos de la ciencia, la ingeniería, la economía y la tecnología, donde es necesario anticipar tendencias, cambios o situaciones críticas.

En los siguientes ejemplos se observa cómo el concepto de límite permite analizar situaciones reales en las que una variable se aproxima a un valor relevante, aun cuando no necesariamente lo alcance en el instante considerado.

1. **Nivel de un río.** Sea $h(t)$ la altura del agua de un río en el instante t . El límite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} h(t)$$

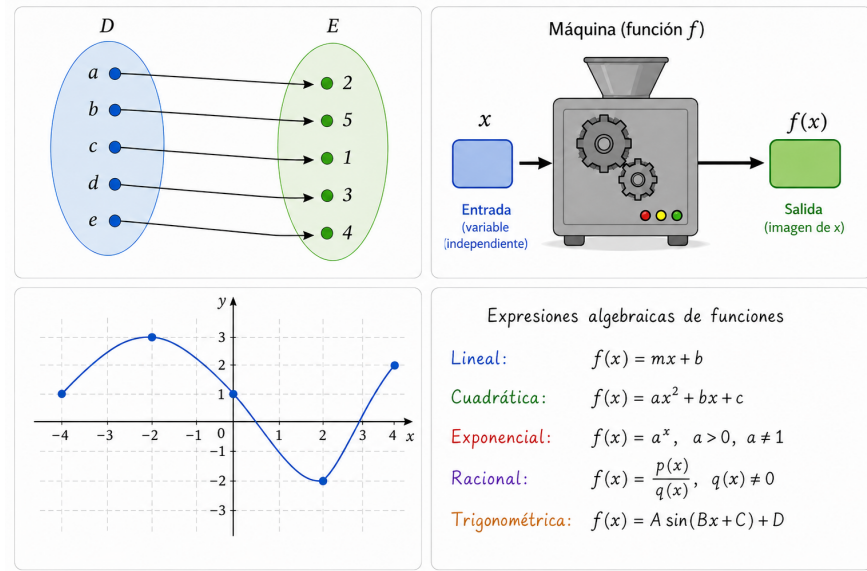


Figure 1: Representaciones de una función: diagrama de flechas, máquina, gráfica y expresión algebraica.

permite estimar la altura a la que se aproxima el río cerca de un instante crítico t_0 , por ejemplo, durante lluvias intensas.

2. **Temperatura y heladas en la agricultura.** Si $T(t)$ representa la temperatura durante la madrugada, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} T(t) = 0^\circ\text{C}$$

indica que la temperatura se aproxima al punto de congelación. Esto permite anticipar posibles heladas y tomar medidas para proteger los cultivos.

3. **Producción industrial.** Sea $P(t)$ la temperatura, presión o producción de una máquina en función del tiempo. Si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_0,$$

entonces el proceso se estabiliza alrededor del valor P_0 , llamado régimen estacionario.

4. **Velocidad de un vehículo.** Si $s(t)$ representa la posición de un vehículo en el instante t , su velocidad instantánea en t_0 se define mediante el límite

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Este límite representa la velocidad del vehículo en un instante preciso.

5. Otras aplicaciones:

- Crecimiento poblacional;
- Crecimiento de ingresos con saturación;
- Medicina: concentración de un medicamento;
- Economía doméstica y consumo eléctrico, entre otros.

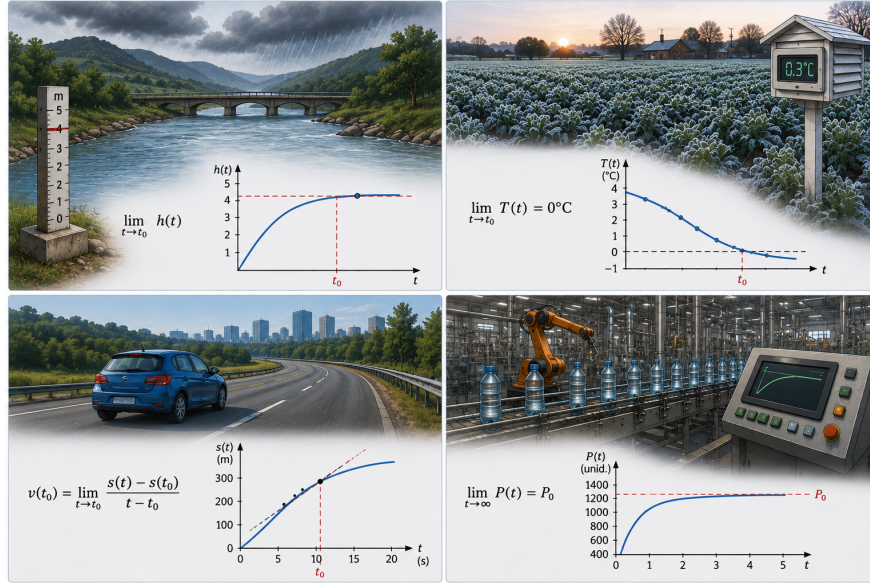


Figure 2: Algunas aplicaciones de límites.

1.2 Límites de funciones reales en un número

Introducción conceptual

Cuando una variable se aproxima a un número real a , puede hacerlo desde valores menores (por la izquierda) o desde valores mayores (por la derecha). A los valores que se acercan a a desde la izquierda los denotamos como $x \rightarrow a^-$, y a los que se acercan desde la derecha como $x \rightarrow a^+$.

El **límite por la izquierda** de una función $f(x)$ en a se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

y representa el valor al que se acercan las imágenes cuando x se aproxima a a tomando valores menores que a .

Análogamente, el **límite por la derecha** se denota:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

y representa el valor al que se acercan las imágenes cuando x se aproxima a a tomando valores mayores que a .

Decimos que el **límite de una función** $f(x)$ **existe en** $x = a$ si, y solo si, los límites laterales existen y coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Asimismo, diremos que una función f es **continua en el punto** $x = a$ (perteneciente a su dominio) si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Actividad 1: Límite que se puede evaluar directamente

Objetivo: Comprender que cuando una función es continua en un punto, el valor del límite coincide con el valor de la función.

Considere la función:

$$f(x) = x^2 + 3$$

1. Complete la siguiente tabla de valores para x cercanos a 2:

x	1.90	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
$f(x)$								

2. Reflexione:

- ¿La función está definida en $x = 2$? Si es así, ¿cuál es el valor de $f(2)$?
- ¿Qué valor parece alcanzar la función cuando x se aproxima a 2 por la izquierda?
- ¿Qué podemos decir respecto al límite lateral izquierdo $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$?
- ¿Qué valor parece alcanzar la función cuando x se aproxima a 2 por la derecha?
- ¿Qué podemos decir respecto al límite lateral derecho $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$?
- ¿Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? ¿Coincide con el valor de la función en $x = 2$?
- ¿Es continua la función en $x = 2$? Justifique su respuesta.

Conclusión esperada:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 7$$

Reflexión: Cuando una función es continua en el punto donde se evalúa el límite, entonces el valor del límite coincide con el valor de la función en ese punto. Es decir, basta con reemplazar directamente el valor de $x = a$ en la función para calcular el límite:

$$\text{Si } f \text{ es continua en } x = a, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Actividad 2: Límite que no se puede evaluar directamente (pero sí existe)

Objetivo: Comprender que el límite de una función puede existir, incluso si la función no está definida en el punto en cuestión. Aplicar manipulaciones algebraicas para evaluar el límite en aquellos casos donde el punto no pertenece al dominio de la función.

Considere la función:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

1. Complete la siguiente tabla de valores para x cercanos a 1:

x	0.90	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g(x)$									

2. Reflexione:

- ¿La función está definida en $x = 1$? Justifique su respuesta.
- ¿Qué valor parece tomar la función cuando x se aproxima a 1 por la izquierda? ¿Y por la derecha?
- ¿Coinciden los límites laterales en $x = 1$? ¿Qué implicancia tiene esto?
- ¿Se puede afirmar que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existe? Fundamente.
- En este caso, ¿es continua la función en $x = 1$? ¿Por qué?

3. Cálculo del límite por manipulación algebraica:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Observación: Aunque la función original no está definida en $x = 1$, sí podemos simplificar la expresión $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ considerando únicamente valores de x cercanos a 1 pero distintos de 1. Esto nos permite cancelar el factor común $(x - 1)$, ya que en el contexto del límite nos interesa el comportamiento de la función *alrededor* del punto, no en el punto mismo.

Actividad 3: Límite lateral único debido al dominio

Objetivo: Comprender que en algunos casos solo se puede estudiar el límite por un solo lado, debido a que el dominio no permite acercarse desde ambos lados.
Considere la función:

$$h(x) = \sqrt{x - 2}$$

1. Complete la siguiente tabla de valores para x cercanos a 2 por la derecha:

x	2	2.0001	2.001	2.01	2.1	2.25
$h(x)$						

2. Reflexione:

- ¿Está definida la función para valores menores que 2?
- ¿Desde qué lado se puede estudiar el límite en $x = 2$ y explique por qué?
- ¿Qué valor parece alcanzar la función cuando $x \rightarrow 2^+$?
- ¿Existe el límite en $x = 2$? ¿Por qué sí o por qué no?

Conclusión esperada:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) \text{ no está definida (fuera del dominio) pero } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 0$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ no existe (falta un límite lateral)

Actividad 4: Límite en funciones definidas por tramos

Objetivo: Aplicar el concepto de límite lateral y total en una función definida por partes. Analizar continuidad o discontinuidad.

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Complete la siguiente tabla de valores para x cercanos a 1:

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$							

2. Reflexione:

- ¿Cuál es el valor de la función en $x = 1$?
- ¿Cuál es el límite por la izquierda en $x = 1$?
- ¿Cuál es el límite por la derecha en $x = 1$?
- ¿Existe el límite en $x = 1$? ¿La función es continua en ese punto?

3. Cálculo simbólico:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2(1) - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe (límite lateral desigual).}$$

$$f(1) = 2(1) - 1 = 1$$

Conclusión esperada: Existe una discontinuidad de salto en $x = 1$, ya que los límites laterales no coinciden. La función sí está definida, pero no es continua en ese punto. También se dice que es continua desde la derecha.

1.3 Límite infinito y asíntota vertical

Introducción conceptual

Hasta ahora hemos analizado situaciones donde, al acercarse x a un número, los valores de la función también se acercan a un valor finito. Sin embargo, hay funciones cuyo comportamiento cerca de ciertos puntos es muy distinto: en lugar de acercarse a un número, los valores de la función crecen sin límite o disminuyen sin fin.

Este fenómeno se conoce como un **límite infinito**. Se presenta cuando, al acercarse x a cierto valor a (por la izquierda o por la derecha), los valores de $f(x)$ aumentan o disminuyen sin control. En estos casos, no hay un valor finito como límite, pero sí se puede describir la tendencia general del comportamiento de la función cerca de $x = a$.

¿Qué representa este comportamiento gráficamente? Una **asíntota vertical**, que es una recta de la forma $x = a$ hacia la cual la gráfica de la función se aproxima cuando los valores de

$f(x)$ se disparan positiva o negativamente.

Es importante destacar que la asíntota **no forma parte de la gráfica** de la función: no hay ningún punto de la función exactamente sobre esa recta. Más bien, la asíntota describe cómo se comporta la función muy cerca del valor $x = a$.

Este tipo de comportamiento es clave para analizar funciones racionales u otras con discontinuidades, y permite predecir el crecimiento descontrolado o la caída abrupta en sus gráficos.

A continuación, exploraremos este comportamiento a través de una actividad visual, numérica y analítica.

Actividad 5: Límite infinito y asíntota vertical

Objetivo: Comprender que cuando una función racional tiene un denominador que se anula (pero el numerador no), el valor del límite puede tender a infinito o menos infinito, lo que da origen a una **asíntota vertical**.

Considere la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

1. Complete la siguiente tabla de valores para x cercanos a 3:

x	2.7	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1	3.3
$f(x)$								

2. Reflexione:

- ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 por la izquierda? ¿Y por la derecha?
- ¿Está definida la función en $x = 3$?
- ¿Podemos decir que el límite existe en $x = 3$?

3. Conclusión esperada:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ no existe (hay asíntota vertical en $x = 3$).

1.4 Límite en el infinito y asíntota horizontal

Introducción conceptual

Hasta ahora hemos estudiado qué ocurre con los valores de una función cuando la variable x se aproxima a un número dado. Sin embargo, también es importante analizar el comportamiento de una función cuando x toma valores muy grandes o muy pequeños, es decir, cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$. Esta idea nos lleva al estudio del **límite en el infinito**.

¿Qué nos permite entender este tipo de límites? Nos permite responder preguntas como: ¿la función sigue creciendo indefinidamente? ¿Se estabiliza en algún valor? ¿Tiende a cero? En

este contexto, el foco no está en los valores cercanos a un número, sino en lo que ocurre “lejos en el tiempo”, “a grandes escalas” o “en el infinito”.

Cuando el valor de la función se aproxima a un número fijo al hacer que $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, decimos que la función tiene una **asíntota horizontal**. Por ejemplo, si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la función f .

Para comprender esta idea, trabajaremos con dos actividades concretas.

Actividad 6: ¿Qué ocurre con $\frac{1}{x}$ cuando x crece sin límite?

Objetivo: Comprender de manera intuitiva que al dividir una constante por un número que crece indefinidamente, el resultado se hace cada vez más pequeño, acercándose a cero.

Exploración numérica: Observa lo que ocurre con los valores de $\frac{1}{x}$ cuando x toma valores cada vez más grandes:

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
$\frac{1}{x}$	1.00	0.10	0.01	0.001	0.0001	0.00001

Reflexiona y responde:

- ¿Qué ocurre con los valores de $\frac{1}{x}$ a medida que x crece?
- ¿Puedes pensar en una forma de describir lo que pasa con $\frac{1}{x}$ cuando x es “enorme”?

Representación gráfica: A continuación se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Observa cómo se comporta la curva cuando x crece hacia el infinito:

Conclusión esperada: A medida que x crece sin límite, los valores de $\frac{1}{x}$ se hacen cada vez más pequeños, acercándose a cero. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

En consecuencia, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Este resultado será clave para estudiar límites al infinito y entender la existencia de **asíntotas horizontales**.

Extensión: Verifica que lo mismo ocurre con otras expresiones similares:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{300}{x^3} = 0$$

Actividad 7: ¿Qué ocurre con $f(x)$ cuando x crece sin límite?

Objetivo: Comprender el concepto de límite cuando $x \rightarrow \infty$ y su relación con el comportamiento final de una función racional. Reforzar el concepto de asíntota horizontal como valor al cual la función se aproxima.

Considere la función:

$$f(x) = \frac{300x}{x+5}$$

1. Complete la siguiente tabla de valores:

x	10	50	100	500	1000	10000
$f(x)$						

2. Reflexione:

- ¿Qué sucede con el valor de $f(x)$ a medida que x crece?
- ¿Parece haber un valor al cual $f(x)$ se aproxima sin alcanzarlo?
- ¿Cómo se relaciona esto con el concepto de asíntota horizontal?

3. Visualice el comportamiento gráfico de la función. (Puede usar GeoGebra o Desmos.)

4. Calcule el límite analíticamente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{300x}{x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{300}{1 + \frac{5}{x}} = 300$$

Conclusión esperada: A medida que x crece, la fracción se aproxima a 300. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 300$$

La recta $y = 300$ es una **asíntota horizontal** de la función.

1.5 Aplicaciones contextualizadas del concepto de límite**1. Crecimiento poblacional acelerado**

En una colonia de bacterias, el número de individuos a las t horas se modela por la función:

$$P(t) = 500 \cdot \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)$$

Preguntas:

- Representa gráficamente la función $P(t)$ para valores $t = 1, 2, 3, \dots, 20$.
- ¿Cuál es el comportamiento de $P(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$? ¿A qué valor parece acercarse la población?
- Calcula el límite analíticamente: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.
- Interpreta el resultado en contexto: ¿Qué significa ese límite desde el punto de vista biológico?

2. Crecimiento de ingresos con saturación

Una aplicación web gana nuevos usuarios según la función:

$$U(x) = \frac{200x}{x + 10}$$

donde x representa el número de días desde su lanzamiento.

Preguntas:

- a) Evalúa $U(x)$ para $x = 10, 50, 100, 500, 1000$.
- b) ¿Qué comportamiento observas cuando x se hace muy grande?
- c) Calcula: $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x)$.
- d) ¿Por qué la función tiene una *asíntota horizontal*? ¿Qué representa eso en términos del modelo?

3. Caída de velocidad en una reacción

El calor generado por una reacción química disminuye según la expresión:

$$T(t) = \frac{100}{t}$$

Preguntas:

- a) Evalúa $T(t)$ para $t = 1, 10, 100, 1000$.
- b) ¿Cómo se comporta $T(t)$ a medida que t crece? ¿Qué representa eso físicamente?
- c) Calcula el límite: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{100}{t}$.
- d) ¿Qué representa que ese límite sea cero?

2. Derivadas y razones de cambio

Esta sección busca introducir el concepto de derivada desde una perspectiva intuitiva y aplicada, utilizando representaciones gráficas, situaciones reales y el análisis del comportamiento de funciones. Se abordará la derivada como razón de cambio, su uso para describir crecimiento y decrecimiento, y se presentarán ideas clave como extremos locales y concavidad.

2.1 Razón de cambio promedio

Introducción conceptual

Cuando una cantidad depende de otra (por ejemplo, la distancia recorrida según el tiempo), podemos preguntarnos cuánto cambia una cantidad cuando la otra cambia un poco. La razón de cambio promedio es una forma de medir cómo varía una función en un intervalo.

Se calcula mediante:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Este cociente representa la pendiente de la recta secante entre los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Actividad 8: Razón de cambio promedio

Considere la función $f(x) = x^2$.

a) Calcule la razón de cambio promedio entre:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}, \quad \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}, \quad \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1}$$

b) ¿Qué sucede con esta razón de cambio a medida que los puntos se acercan a $x = 1$?

c) Interprete los resultados en términos de pendiente de una recta secante.

2.2 Razón de cambio instantánea: la derivada

Introducción conceptual

Cuando el intervalo entre dos puntos tiende a cero, la razón de cambio promedio se convierte en la razón de cambio instantánea. Este valor es la **derivada**, y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Este valor nos permite describir con precisión cómo cambia una cantidad en el instante específico en el cual $x = a$.

Interpretación en termino de pendientes: La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en $x = a$ se calcula tomando el límite de la pendiente de la recta secante.

Herramientas útiles: derivadas básicas

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Actividad 9: Derivada de $f(x) = x^2$

- Calcule $f'(1), f'(2), f'(3)$ usando $f'(x) = 2x$.
- ¿Qué representan estos valores en la gráfica?
- Dibuja la curva y las rectas tangentes en esos puntos.

Actividad 10: Derivada de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

- Calcule $f'(1), f'(2), f'(3)$ usando $f'(x) = 2x$.
- ¿Qué representan estos valores en la gráfica?
- Dibuja la curva y las rectas tangentes en esos puntos.

2.3 Crecimiento y decrecimiento: interpretación del signo de la derivada

Introducción conceptual

La derivada nos permite saber si una función está creciendo o decreciendo en un intervalo. Si la derivada es positiva, la función sube; si es negativa, baja.

- $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.
- $f'(x^*) = 0 \Rightarrow$ posible extremo local (máximo o mínimo) en $x = x^*$.

Actividad 11: Análisis de crecimiento

Considere $f(x) = -x^2 + 4x$. Su derivada es $f'(x) = -2x + 4$.

- Determine los intervalos donde $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.
- ¿En qué intervalo crece y en cuál decrece la función?
- Verifique los resultados con la gráfica de $f(x)$.

c) ¿Existe algún posible valor máximo o algún valor mínimo?

2.4 Puntos críticos y extremos locales

Introducción conceptual

Un **punto crítico** es un valor de x donde $f'(x) = 0$ o la derivada no existe. En estos puntos, la función puede alcanzar un **máximo** o **mínimo local**, dependiendo del comportamiento de la derivada a su alrededor.

El **criterio de la primera derivada** nos permite determinar la naturaleza de un número crítico a partir del comportamiento de la derivada en su entorno.

Si la derivada de una función f cambia de signo alrededor de un punto x^* , podemos concluir lo siguiente:

- Si $f'(x) > 0$ para valores de x cercanos a x^* por la izquierda, y $f'(x) < 0$ por la derecha, entonces la función pasa de creciente a decreciente. Por tanto, $x = x^*$ es un **máximo local**.
- Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de x^* y $f'(x) > 0$ a la derecha, la función pasa de decreciente a creciente. Entonces, $x = x^*$ es un **mínimo local**.
- Si la derivada no cambia de signo (es decir, es positiva o negativa a ambos lados de x^*), entonces no hay un extremo local en ese punto.

Actividad 12: Extremos locales

Para $f(x) = -x^2 + 4x$:

- Encuentre el valor de x tal que $f'(x) = 0$.
- Determine si es un máximo o un mínimo, evaluando el signo de $f'(x)$ antes y después.
- Interprete el resultado gráficamente.

2.5 Concavidad y punto de inflexión

Introducción conceptual

La **segunda derivada** nos dice si la función está "abierta hacia arriba" (cóncava positiva) o "hacia abajo" (cóncava negativa). Si la segunda derivada cambia de signo, estamos frente a un **punto de inflexión**.

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidad hacia arriba.
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidad hacia abajo.
- $f''(x_0) = 0$ y cambia de signo $\Rightarrow$ punto de inflexión.

El **criterio de la segunda derivada** permite determinar la naturaleza de un extremo local en un punto crítico x^* , siempre que la derivada primera se anule allí, es decir, $f'(x^*) = 0$.

- Si $f''(x^*) > 0$, entonces la gráfica de f tiene concavidad hacia arriba en x^* , y el punto corresponde a un **mínimo local**.
- Si $f''(x^*) < 0$, entonces la gráfica de f tiene concavidad hacia abajo en x^* , y el punto corresponde a un **máximo local**.
- Si $f''(x^*) = 0$, el criterio no permite concluir y se debe usar otro método (como el criterio de la primera derivada o análisis gráfico).

Actividad 13: Punto de inflexión en una función cúbica

Considere $f(x) = x^3 - 3x$. Se tiene:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

- a) Determine dónde $f''(x) = 0$.
- b) Analice el cambio de signo de $f''(x)$ alrededor de ese punto.
- c) Grafique la función y localice el punto de inflexión.

2.6 Actividades integradoras: optimización

Una de las aplicaciones más útiles de la derivada es la resolución de problemas de **optimización**, es decir, aquellos en los que se desea *maximizar* o *minimizar* una cantidad dentro de ciertas condiciones.

En este tipo de situaciones, el objetivo es:

- Modelar matemáticamente una cantidad que se desea optimizar (por ejemplo, un área, un volumen, un costo, etc.) como una función de una variable.
- Determinar los valores de esa variable que hacen máxima o mínima dicha función.

¿Cómo se aplican las derivadas en este contexto?

Para resolver un problema de optimización (buscar máximos o mínimos de una función en un contexto real), seguimos el siguiente procedimiento:

1. **Leer y comprender el enunciado del problema.** Identificar qué cantidad se desea maximizar o minimizar, y cuáles son las restricciones o condiciones dadas.
2. **Realizar un dibujo o representación geométrica** de la situación, con el fin de visualizar claramente el problema. Esta representación ayuda a identificar las variables involucradas.
3. **Definir las variables** que intervienen en el problema. Es importante que cada variable represente una cantidad concreta y comprensible dentro del contexto.
4. **Expresar la función objetivo** $f(x)$ que se desea maximizar o minimizar, utilizando las variables definidas.

5. **Establecer una relación auxiliar o de vínculo** entre las variables, si hay restricciones. Esta relación permite reemplazar variables y escribir la función objetivo en términos de una sola variable.
6. **Determinar el dominio válido** de la función, considerando los valores posibles de la variable según el contexto (por ejemplo, que las longitudes no sean negativas).
7. **Calcular la derivada** $f'(x)$ para hallar los puntos críticos.
8. **Resolver la ecuación** $f'(x) = 0$ y analizar si corresponde a un máximo o mínimo, usando el criterio de la primera derivada o de la segunda derivada.
9. **Interpretar y responder el problema** con una frase clara, indicando el valor máximo o mínimo hallado y su significado en el contexto del problema.

En las actividades siguientes, se propone aplicar esta metodología paso a paso, en problemas reales y visualmente comprensibles, para que los estudiantes comprendan el poder de las matemáticas aplicadas. El objetivo es encontrar valores máximos o mínimos de una función que modela una situación concreta, guiando el razonamiento paso a paso.

Actividad 14: El cerco más eficiente

Una escuela desea construir un huerto rectangular pegado a una pared, por lo que solo se necesita cercar tres de sus lados (dos laterales y el frente). Se cuenta con 24 metros de malla para cercar.

- a) Sea x el largo del lado perpendicular a la pared. ¿Cuál sería el otro lado en función de x , si el total de malla es 24 m?
- b) Escribe una expresión para el área del huerto $A(x)$.
- c) Calcula la derivada $A'(x)$ y encuentra el valor de x que maximiza el área.
- d) Verifica que es un máximo con ayuda de la derivada.
- e) ¿Qué dimensiones debe tener el huerto para que su área sea máxima?

Actividad 15: Un afiche con el menor papel posible

Se diseña un afiche rectangular que debe contener 300 cm² de área de texto. Debe dejarse un margen de 2 cm arriba y abajo, y 1 cm a cada lado. El objetivo es minimizar la cantidad de papel utilizado.

- a) Sea x el ancho del área de texto. ¿Cuál es el alto del área de texto en función de x ?
- b) Escribe una expresión para el área total del papel en función de x , considerando los márgenes.
- c) Calcula la derivada y encuentra el valor de x que minimiza el área total del papel.
- d) Verifica que es un mínimo.
- e) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del afiche para usar la menor cantidad de papel posible?

Actividad 16: Construcción de una caja sin tapa con volumen máximo

Se desea construir una caja sin tapa a partir de una lámina cuadrada de cartón de $40\text{ cm} \times 40\text{ cm}$. Para ello, se recortan cuadrados de lado x en cada esquina y se doblan los lados para formar la caja. El objetivo es encontrar el valor de x que maximiza el volumen de la caja.

- a) Dibuja un esquema de la lámina con los cuadrados recortados y la caja formada.
- b) Expresa las dimensiones de la base de la caja en función de x .
- c) Escribe una expresión para el volumen $V(x)$ de la caja como función del tamaño del corte.
- d) Calcula la derivada $V'(x)$ y encuentra el valor de x que maximiza el volumen.
- e) Verifica que el valor hallado corresponde a un máximo (analiza el signo de la derivada o usa la segunda derivada).
- f) ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener la caja?

3. Integrales: suma acumulativa y área bajo la curva

Introducción conceptual

Después de estudiar cómo cambian las funciones mediante derivadas, ahora nos preguntamos: ¿y si queremos saber cuánto se ha acumulado a lo largo de ese cambio?

La **integral** responde justamente a eso: nos permite calcular el *total acumulado* de una cantidad que cambia, o bien el *área bajo una curva* en un cierto intervalo.

En Educación Media, el enfoque no está en técnicas de integración formal, sino en:

- Comprender que la integral representa una **suma de cantidades pequeñas**.
- Interpretar el valor de una integral como el **área entre una función y el eje x** .
- Aplicar estos conceptos en contextos reales: distancia recorrida, costo total, cantidad acumulada, etc.

3.1 La integral como área bajo la curva

Introducción conceptual

Imagina una función que representa la velocidad de un móvil en función del tiempo. Si queremos saber cuánto ha recorrido en cierto intervalo, una forma intuitiva es calcular el **área bajo la curva** de la gráfica.

Cuando una función $f(x)$ es positiva y continua, el área bajo su gráfica entre $x = a$ y $x = b$ se denota por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Esto se interpreta como:

- Una **suma acumulada** de todos los valores de la función entre a y b .
- El **área** entre la gráfica de la función y el eje x .

Actividad 17: Interpretando área bajo la curva

Considere la función $f(x) = 2x$ en el intervalo $[0, 4]$.

- Dibuja la gráfica de la función y el área que queda bajo la curva entre 0 y 4.
- Calcula el área utilizando geometría elemental (área de un triángulo).
- Interpreta este resultado como acumulación. ¿Qué representa ese área si $f(x)$ fuera una tasa de producción?

3.2 Aproximación de una integral definida usando rectángulos (Sumas de Riemann)

Objetivo: Estimar el valor de una integral definida interpretándola como área bajo la curva de una función, utilizando rectángulos como herramienta visual y de cálculo.

Esquema general: Dada una función continua $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, se puede aproximar la integral $\int_a^b f(x) dx$ mediante:

- Dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- Evaluar la función en un punto dentro de cada subintervalo (usualmente el extremo izquierdo, derecho o punto medio).
- Construir rectángulos con base Δx y altura $f(x_i)$, donde x_i es el punto evaluado.
- Sumar las áreas:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

La sumatoria anterior se conoce como **Suma de Riemann**.

Actividad 18: Aproximación de área bajo la curva con la regla del punto medio

Objetivo: Comprender el significado de la integral definida como área bajo la curva mediante una aproximación por rectángulos con la **regla del punto medio**.

Queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$ usando rectángulos. La curva es simétrica respecto al eje y y su gráfica describe una parábola con vértice en el punto más alto.

Problema: Estima el valor de la siguiente integral:

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

usando la regla del punto medio con $n = 4$ subintervalos.

Paso 1: Determinar el ancho de cada subintervalo.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

Paso 2: Determinar los puntos medios de cada subintervalo.

Los subintervalos son:

$$[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2]$$

Los puntos medios x_i^* son:

$$-1.5, -0.5, 0.5, 1.5$$

Paso 3: Evaluar la función en cada punto medio.

$$f(-1.5) = 4 - (-1.5)^2 = 4 - 2.25 = 1.75$$

$$f(-0.5) = 4 - 0.25 = 3.75$$

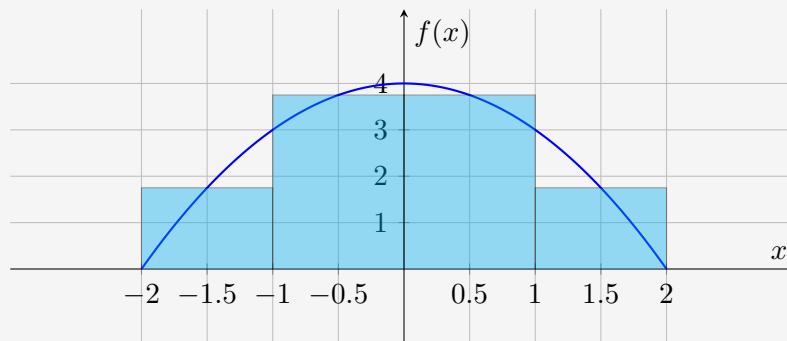
$$f(0.5) = 3.75$$

$$f(1.5) = 1.75$$

Paso 4: Calcular el área aproximada.

$$\text{Área} \approx \Delta x \cdot \sum_{i=1}^4 f(x_i^*) = 1 \cdot (1.75 + 3.75 + 3.75 + 1.75) = 11$$

Representación gráfica: A continuación se muestra la función y los rectángulos construidos sobre los puntos medios:



Preguntas de análisis:

1. ¿Qué representa el área aproximada que obtuviste?
2. ¿El resultado será exacto o una estimación? ¿Por qué?
3. ¿Qué ventajas tiene usar los puntos medios para estimar el área?
4. ¿Qué ocurriría si se usan más subintervalos?

Observación: Si unimos los extremos de cada subintervalo con líneas rectas en lugar de usar rectángulos, se obtiene una mejor aproximación conocida como la **regla del trapecio**, que se puede calcular con la fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Exploración digital sugerida:

Actividad 19: Estimación del área neta

Objetivo: Mejorar la comprensión de la integral definida como área neta entre una curva y el eje horizontal, usando una aproximación con mayor cantidad de subintervalos.

Problema: Estimar el área bajo la curva de la función $f(t) = t^2 - 4$ en el intervalo $[0, 3]$, utilizando **6 subintervalos** y la **regla del extremo izquierdo**.

Paso 1: Dividir el intervalo en 6 subintervalos iguales.

$$\Delta t = \frac{3 - 0}{6} = 0.5$$

Puntos de evaluación: $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$

Paso 2: Evaluar la función en los extremos izquierdos.

$$f(0) = 0^2 - 4 = -4.00$$

$$f(0.5) = 0.25 - 4 = -3.75$$

$$f(1) = 1 - 4 = -3.00$$

$$f(1.5) = 2.25 - 4 = -1.75$$

$$f(2) = 4 - 4 = 0.00$$

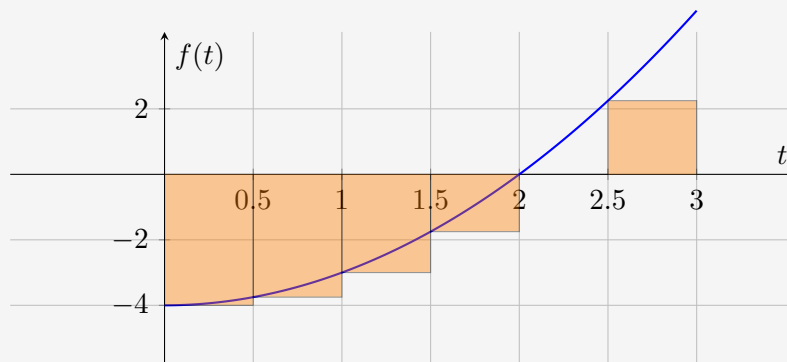
$$f(2.5) = 6.25 - 4 = 2.25$$

Paso 3: Calcular la suma de áreas de los rectángulos.

$$\begin{aligned} \text{Área} &\approx \Delta t \cdot \sum_{i=1}^6 f(t_i) \\ &= 0.5 \cdot (-4.00 - 3.75 - 3.00 - 1.75 + 0 + 2.25) \\ &= 0.5 \cdot (-10.25) = -5.125 \end{aligned}$$

Interpretación: Esta estimación indica que el área neta es negativa, ya que la mayor parte de la gráfica está por debajo del eje t en el intervalo considerado.

Visualización:



Observación: En lugar de rectángulos, podemos usar **trapezios** para mejorar la estimación

del área. Cada trapecio se construye entre dos puntos consecutivos y su área se calcula como:

$$A_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \Delta x$$

La suma total queda como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Este método es más preciso ya que aproxima la curva con segmentos rectos inclinados.

3.3 La integral como suma acumulativa

Introducción conceptual

Además del área bajo la curva, la integral nos permite calcular cuánto se ha **acumulado** de una cantidad que cambia continuamente. Por ejemplo:

- Si $f(t)$ representa la velocidad de un objeto, entonces $\int_a^b f(t) dt$ da la **distancia total recorrida** entre los tiempos a y b .
- Si $f(t)$ representa el costo por minuto de una llamada, la integral nos da el **costo total acumulado**.

Este concepto es clave para comprender fenómenos reales donde hay acumulación: gasto energético, volumen de agua en un tanque, o consumo de recursos con el tiempo.

Actividad 20: Acumulación de distancia con velocidad constante

Una bicicleta avanza a velocidad constante de 6 m/s durante 10 segundos.

- Grafica la función velocidad constante $f(t) = 6$ en el intervalo $[0, 10]$.
- Calcula el área bajo la curva. ¿Qué representa ese valor?
- ¿Qué ocurre si la velocidad cambia a $f(t) = 2t$? Dibuja la gráfica y calcula el área bajo la curva entre $t = 0$ y $t = 4$.
- Interpreta la integral de $f(t) = 2t$ como una distancia.

3.4 Interpretación geométrica y aplicación en contextos reales

Introducción conceptual

Desde un punto de vista geométrico, la integral representa el área bajo la curva. Pero desde un punto de vista aplicado, representa el **total acumulado de algo que cambia**.

- Si la función sube por encima del eje x , la acumulación es positiva.

- Si baja del eje x , representa una disminución (puede interpretarse como pérdida, por ejemplo).
- La integral también puede verse como un **balance neto**.

Actividad 21: Consumo eléctrico diario

La potencia instantánea (en watts) que consume una casa está modelada por:

$$P(t) = 100 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

donde t es el número de horas desde la medianoche. Se mide entre las 6 AM y las 6 PM, es decir, $t \in [6, 18]$.

- Dibuja una aproximación gráfica de $P(t)$ en ese intervalo.
- ¿Qué representa el área bajo la curva entre $t = 6$ y $t = 18$?
- Si aproximamos el área como una media base por altura (por ejemplo con rectángulos), ¿cuál sería el consumo total estimado en ese día?

3.5 Actividades integradoras: cálculo de áreas y acumulación

Actividad 22: Costo total acumulado

El costo instantáneo de una conexión a internet varía con el tiempo según la función:

$$C(t) = 100 + 20t$$

donde t es el tiempo en horas y $C(t)$ está en pesos por hora. El servicio dura 5 horas.

- Grafica $C(t)$ en el intervalo $[0, 5]$.
- Calcula el área bajo la curva en ese intervalo.
- Interpreta el resultado. ¿Qué representa ese valor en contexto?

Actividad 23: Acumulación de agua en un tanque

El flujo de agua (en litros por minuto) que entra a un tanque está dado por la función:

$$F(t) = 4t(6 - t)$$

en el intervalo $t \in [0, 6]$.

- Grafica la función en ese intervalo. ¿Qué forma tiene?
- ¿En qué instante el flujo es máximo?

- c) Calcula el área bajo la curva. ¿Qué representa en el contexto?
- d) ¿Qué pasa si extendiéramos el intervalo a $[0, 8]$? ¿El área sigue representando agua acumulada?

Cierre del cursillo: síntesis de contenidos y proyección docente

Este cursillo tuvo como propósito actualizar y fortalecer el manejo conceptual y didáctico de tres nociones fundamentales del Cálculo: **límites**, **derivadas** e **integrales**, desde una perspectiva accesible, visual y contextualizada, coherente con los nuevos estándares para la formación docente en Matemática.

Síntesis de los contenidos trabajados

- **Límites:** Se abordaron como herramientas para describir el comportamiento de una función cerca de un punto o en el infinito. Se introdujo el concepto de límite lateral, existencia del límite, asíntotas verticales y horizontales, con actividades numéricas, gráficas y aplicadas.
- **Derivadas:** Se interpretaron como razón de cambio instantánea. Se analizaron situaciones de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos locales, y concavidad. Se incluyeron actividades de aplicación contextual en problemas de optimización.
- **Integrales:** Se introdujeron como suma acumulativa y como área bajo la curva. Se analizaron situaciones reales donde es necesario calcular una acumulación: distancia, costo, flujo, etc., priorizando la interpretación visual y contextual del proceso.

Proyección hacia el aula de Educación Media

Los contenidos trabajados pueden servir de base para desarrollar experiencias de aprendizaje significativas en el aula. Para ello, se recomienda:

- Favorecer la visualización gráfica y la interpretación de fenómenos reales.
- Introducir conceptos de forma progresiva y con apoyo de tecnología (GeoGebra, Desmos, simuladores, etc.).
- Priorizar el desarrollo de la comprensión conceptual por sobre las técnicas formales.
- Estimular el trabajo con tareas abiertas, análisis de comportamientos, interpretación de gráficas y modelación de situaciones reales.

Reflexión final

Una enseñanza efectiva del Cálculo en Educación Media no requiere transmitir formalismos universitarios, sino promover el **pensamiento funcional y variacional**, permitiendo que los y las estudiantes comprendan, interpreten y usen los conceptos fundamentales del cambio y la acumulación en contextos reales.

Este cursillo ha sido diseñado para entregar herramientas concretas, ejemplos aplicables y actividades que puedan ser adaptadas en diferentes niveles escolares. Esperamos que contribuya al fortalecimiento profesional de los docentes y al aprendizaje significativo de sus estudiantes.